MATHÉMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet seront distribuées deux feuilles de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuilles supplémentaires.

L'utilisation de papiers graphiques ou de tables apportés par le candidat sera assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

Les candidats doivent impérativement respecter la précision demandée dans les résultats numériques.

EXERCICE 1 (*7 points*)

Le tableau suivant présente la répartition de l'impôt sur le revenu en France en 1980

Impôt payé en F	Nombre de contribuables (en millions)
[0 ; 1 000[	2,5
[1 000 ; 2 000[	2,4
[2 000 ; 5 000[	4,9
[5 000 ; 10 000[	2,8
[10 000 ; 15 000[	1
[15 000 ; 20 000[	0,4
[20 000 ; 50 000[	0,7
[50 000 ; 200 000]	0,3

On appelera c_i les centres des classes. On présentera les calculs sous forme de tableau.

1° Calculer :

a) l'impôt moyen $\bar{c}$

b) l'impôt median *Me*

c) l'impôt medial *MI*

On donnera les valeurs au centime près.

2° Construire la courbe de concentration ou courbe de Gini sur la feuille de papier millimétré fournie.
Les pourcentages nécessaires à la construction seront donnés à 10^{-1} près au plus proche, la courbe sera inscrite dans un carré de 10 cm de côté.

3° Calculer la valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche de l'indice de concentration ou indice de Gini.

EXERCICE 2 (*5 points*)

Une société assure l'exploitation d'un puits de pétrole de l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant où elle décide l'arrêt de l'exploitation. La quantité de pétrole est mesurée en milliers de barils. L'unité de temps est l'année.

On suppose que le flux de pétrole extrait est une fonction f de t.

Durant la période de lancement ($0 \leqslant t < 2$), f est donnée par la formule $f(t) = 3e^{0,5t}$.

Durant la période de développement de l'exploitation ($2 \leqslant t < 5$), f est donnée par la formule $f(t) = at + b$, a et b étant des constantes réelles.

Durant la période d'exploitation régulière ($5 \leqslant t < 17$). f est une constante c.

Enfin, durant la phase d'épuisement ($17 \leqslant t \leqslant 20$), f est donnée par la formule $f(t) = 7{,}5e^{-t+18}$

1° On suppose que f est continue sur [0,20]. Déterminer a, b, c.

2° Étudier la dérivabilité de f.

3° Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé sur la feuille de papier millimétré fournie.

Tournez la page S.V.P.

4° Calculer la quantité de pétrole extraite pendant la durée de l'exploitation, c'est-à-dire $\int_0^{20} f(t)\,dt$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près au plus proche.

EXERCICE 3 (*8 points*)

1° On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 25 & -45 & 60 \\ 7 & 7 & -28 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer PQ.

En déduire que P est inversible. Donner l'expression de P^{-1}.

b) Calculer $D = P^{-1}AP$.

c) Calculer D^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrer, par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

e) En déduire A^n.

2° Un point lumineux est susceptible d'occuper 3 positions différentes U, V, W. Il change de position à chaque seconde. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le point lumineux se trouve en V.

On suppose que :

- Si à l'instant n, le point lumineux se trouve en U, la probabilité qu'à l'instant $n + 1$ il se trouve en V est de 3/4 et la probabilité qu'à l'instant $n + 1$ il se trouve en W est de 1/4.
- Si à l'instant n, le point lumineux se trouve en V, la probabilité qu'à l'instant $n + 1$ il se trouve en U est de 3/4 et la probabilité qu'à l'instant $n + 1$ il se trouve en W est de 1/4
- Si à l'instant n, le point lumineux se trouve en W, à l'instant $n + 1$ il se trouve en V.

On note : U_n l'événement « le point lumineux est en U à l'instant n »

V_n l'événement « le point lumineux est en V à l'instant n »

W_n l'événement « le point lumineux est en W à l'instant n »

$p_n = p(U_n)$, $q_n = p(V_n)$, $r_n = p(W_n)$

On a donc $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

où $B = \frac{1}{4} A$ (A étant la matrice donnée en 1°)

b) Calculer p_n, q_n, r_n.

c) Déterminer les limites p, q, r des suites (p_n), (q_n), (r_n)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail